Petrinetze

Petrinetze

Literatur:

- B. Baumgarten, Petri Netze, Akademischer Verlag, 1996
- W. Reisig, Systementwurf mit Netzen, Springer-Verlag, 1985
- J. L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall, 1981

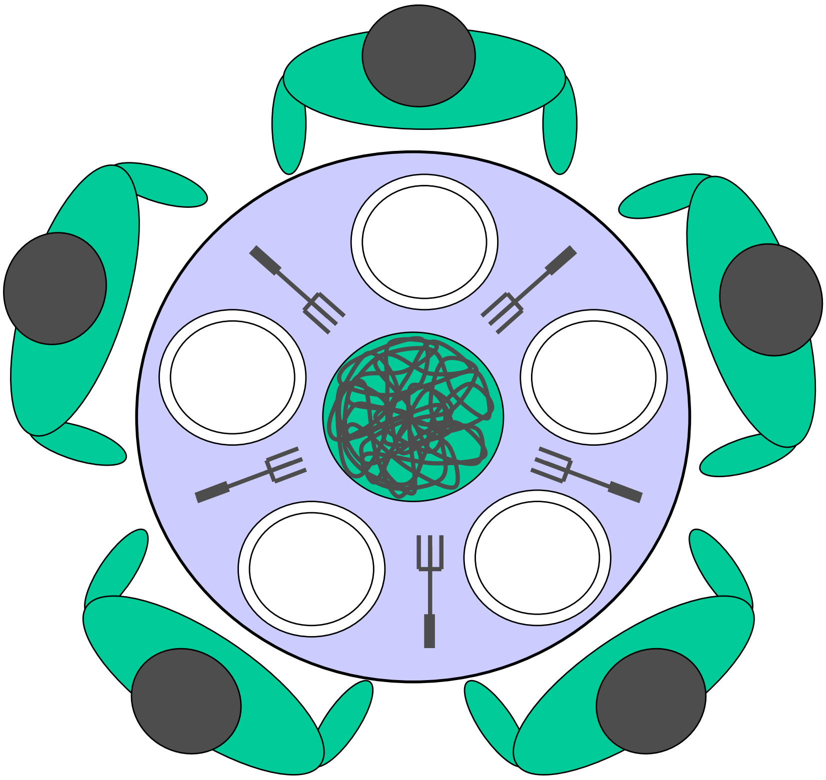
Petrinetze

Idee von Petrinetzen

- Modellierung eines Systems als
  - Nebenläufige Prozesse
  - Bedingungen und Abhängigkeiten dieser nebenläufigen Prozesse (Synchronisationsbedingungen)
- Simulation und Analyse des daraus resultierenden Verhaltens
  - mit Konflikten und Nichtdeterminismus
  - daraus resultierenden unterschiedlichen Verhaltensmustern (Erreichbarkeit)
  - Lebendigkeit
  - Sicherheit
  - ...

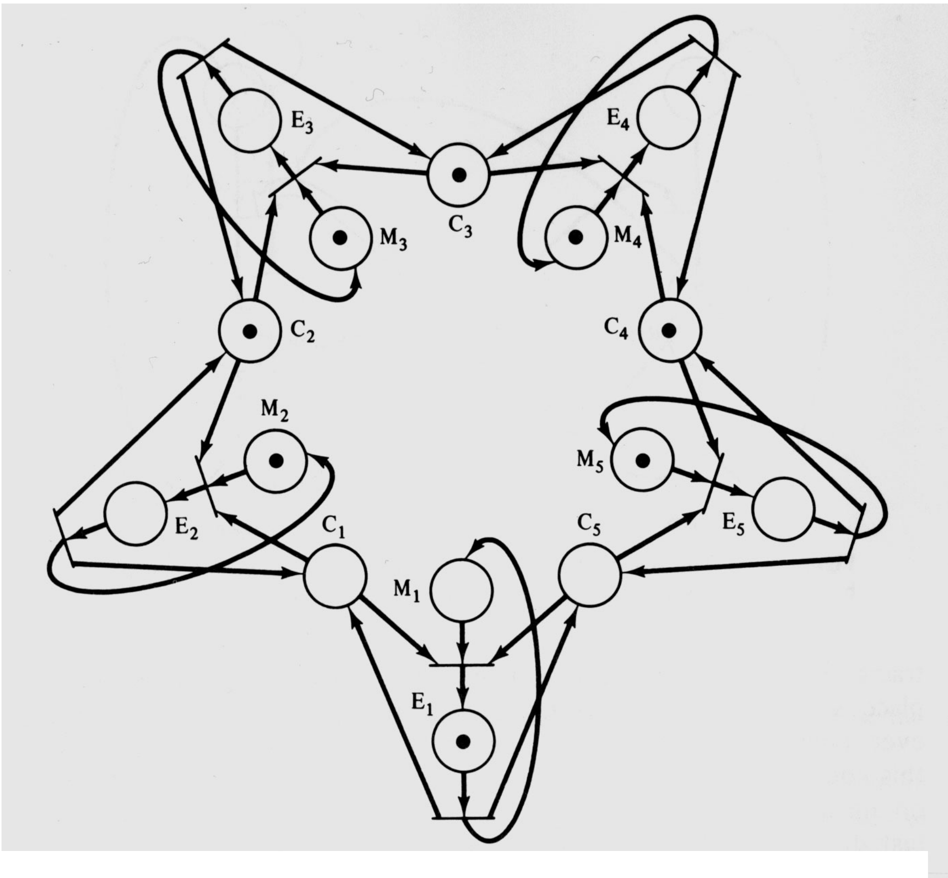
Dining Philosophers Problem

Petrinetze



Dining Philosophers Problem

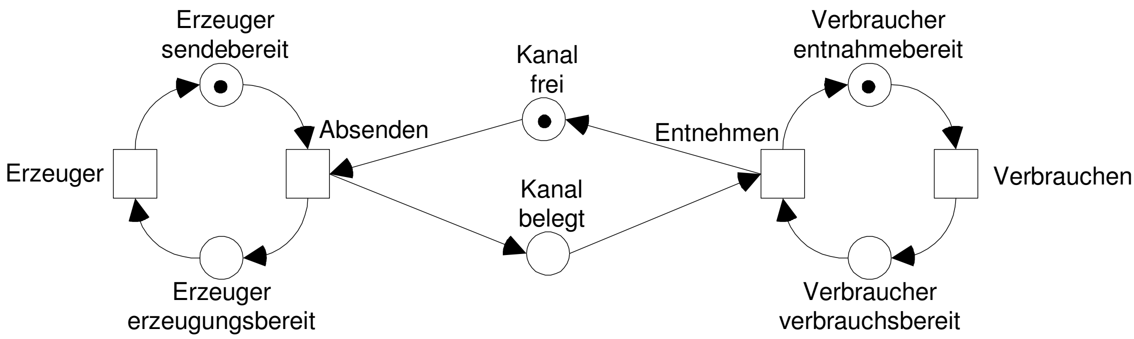
Petrinetze



Konzept der Modellierung mit Petrinetzen

- passive Komponenten (Plätze, Stellen, Bedingungen, Kanäle, ...)
  - modellieren Betriebsmittel, Bedingungen, Queues, Speicher, Behälter, Variablen etc. des realen Systems (alles was einen Zustand annehmen kann)
- Markierungen der passiven Komponenten modellieren aktuellen Zustand der passiven Komponenten
- aktive Komponenten (Transitionen, Ereignisse, Prozesse, ...)
  - modellieren Aktivitäten, die Marken durch das System fließen lassen und so die Zustände, Bedingungen etc. verändern
- Kanten zwischen passiven und aktiven Komponenten
  - modellieren Zusammenhänge von passiven und aktiven Komponenten
  - stellen Fluss der Marken dar

Beispiel eines Petrinetzes



- passive Komponenten durch Kreis
- aktive Komponenten durch Rechteck (oder Strich)
- Marken durch Punkt
- Fluss der Marken über Kanten
- Aktivierungsbedingungen für aktive Komponenten durch passive Komponenten bei eingehenden (und ausgehenden) Kanten

Mathematische Definition

Ein Petrinetz N ist ein Tupel

N = (P, T, Pre, Post)

mit

P = $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$	ist eine Menge von Plätzen
T = $\{t_1, t_2, t_3, ...\}$	ist eine Menge von Transitionen
Pre $\subseteq$ P $\times$ T	ist die Menge der gerichteten Kanten von Plätzen zu Transitionen
Post $\subseteq$ T $\times$ P	ist die Menge der gerichteten Kanten von Transitionen zu Plätzen

Des weiteren seien definiert Markierungen M als Abbildungen

M: P $\rightarrow \mathbb{N}$

bzw.

M: P $\rightarrow \{0, 1\}$

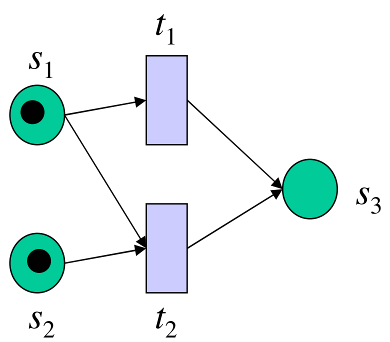
durch die den Plätzen eine natürliche Zahl für die Anzahl der Marken zugeordnet wird

Ein Petrinetz

N = (P, T, Pre, Post, M_0)

mit der Anfangsmarkierung M_0 wir als *initiales Petrinetz* bezeichnet

Beispiel Mathematische Definition



N = (P, T, Pre, Post, M_0)

mit

P = $\{s_1, s_2, s_3\}$

T = $\{t_1, t_2\}$

Pre = $\{(s_1, t_1), (s_1, t_2), (s_2, t_2)\}$

Post = $\{(t_2, s_3), (t_1, s_3)\}$

M_0: P $\rightarrow \mathbb{N}$

mit

$M_0(s_1) = 1$, $M_0(s_2) = 1$, $M_0(s_3) = 0$

Mathematische Definition (2)

Folgende Mengen sind für Transitionen *t* definiert:

In(*t*) ist die Menge aller *Eingangsplätze* der Transition *t*

$\mathrm{In}(t) = \{p \mid (p, t) \in \mathrm{Pre}\}$

Out(*t*) ist die Menge aller *Ausgangsplätze* der Transition *t*

$\mathrm{Out}(t) = \{p \mid (t, p) \in \mathrm{Post}\}$

Analog sind folgende Mengen für Plätze *p* definiert:

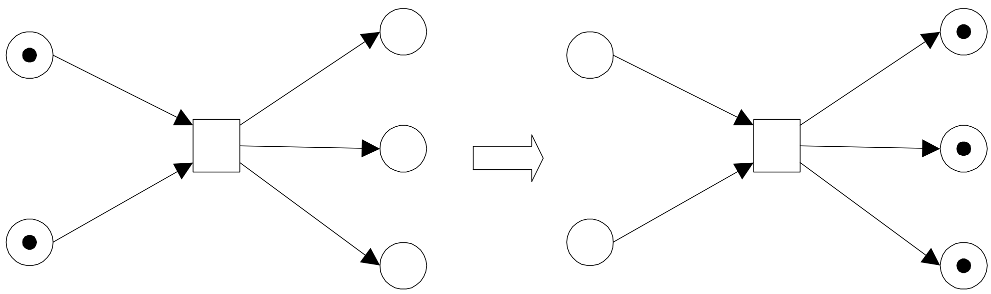
In(*p*) ist die Menge aller Eingangstransitionen des Platzes *p*

$\mathrm{In}(p) = \{t \mid (t, p) \in \mathrm{Post}\}$

Out(*p*) ist die Menge aller Ausgangstransitionen des Platzes *p*

$\mathrm{Out}(p) = \{t \mid (p, t) \in \mathrm{Pre}\}$

Regeln für den Markenfluss (einfachster Fall)



Schaltbarkeit von Transitionen:

- Eine Transition ist schaltbar bei einer bestimmten Markierung M, wenn alle seine Eingangsplätze eine Markierung haben

  $\forall\, p \in \mathrm{In}(t) : M(p) > 0$

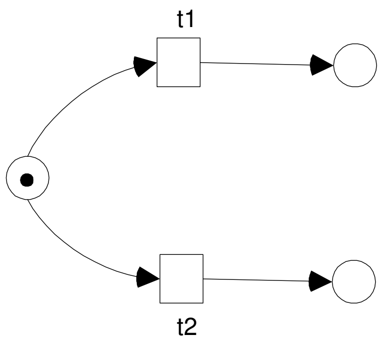
Schalten von Transitionen:

- Beim Schalten einer Transition *t* wird jeweils eine Marke von den Eingangsplätzen entnommen und jeweils eine Marke auf den Ausgangsplätzen der Transition abgelegt.
- Dadurch wird ausgehend von einer Markierung M, bei der Transition *t* schaltbar ist, eine neue Markierung M' wie folgt erzeugt

$$\forall\, p \in P : M'(p) = \begin{array}{ll} M(p) - 1 & \text{wenn } p \in \mathrm{In}(t) \wedge p \notin \mathrm{Out}(t) \\ M(p) + 1 & \text{wenn } p \in \mathrm{Out}(t) \wedge p \notin \mathrm{In}(t) \\ M(p) & \text{sonst} \end{array}$$

Konflikte

- Transitionen t_1 und t_2 stehen in Konflikt zueinander, wenn beide schaltbar sind und durch das Schalten der einen Transition die andere nicht mehr schaltbar ist.



- Ein Konflikt stellt einen Nicht-Determinismus im Modell dar, durch den sich unterschiedliches Verhalten ergibt.

Kapazität von Plätzen und Gewicht von Kanten

Kapazität von Plätzen

– Plätze können durch Kapazitäten beschränkt sein, die die maximale Anzahl der Marken begrenzt, d.h.

$$K: P \rightarrow \mathbb{N}$$

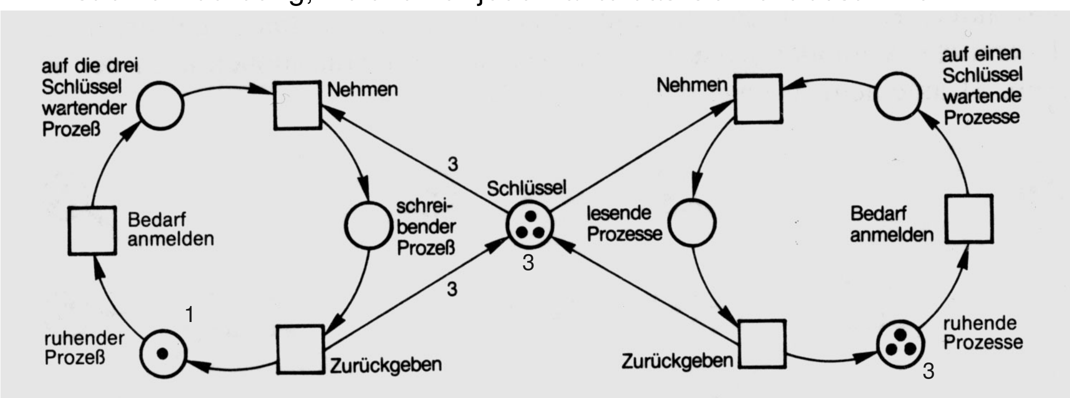
ist eine Abbildung, welche für jeden Platz *p* die maximale Anzahl der Marken bestimmt

Kantengewicht

– Kantengewichte können verwendet werden, um die Anzahl der beim Schalten einer Transition fließenden Marken zu bestimmen; d.h

$$W: Pre \cup Post \rightarrow \mathbb{N}$$

ist eine Abbildung, welcher für jede Kante das Gewicht bestimmt.



Petrinetze

Erweiterte Schaltregel

Unter Berücksichtigung von Kapazität von Plätzen und Gewicht von Kanten ergibt sich folgende erweiterte Schaltregel

Schaltbarkeit von Transitionen:

– Eine Transition *t* ist schaltbar (oder aktiviert) bei einer bestimmten Markierung M, wenn alle seine Eingangsplätze *p* mindestens so viele Marken haben wie das Gewicht der Kante (*p*, *t*)

$$\forall\, p \in \mathrm{In}(t) : \mathrm{M}(p) \geq \mathrm{W}(p, t)$$

und alle Ausgangsplätze *q* soviel freie Kapazität wie das Gewicht der Kante (*t*, *q*)

$$\forall\, q \in \mathrm{Out}(t) : \mathrm{K}(q) - \mathrm{M}(q) \geq \mathrm{W}(t, q)$$

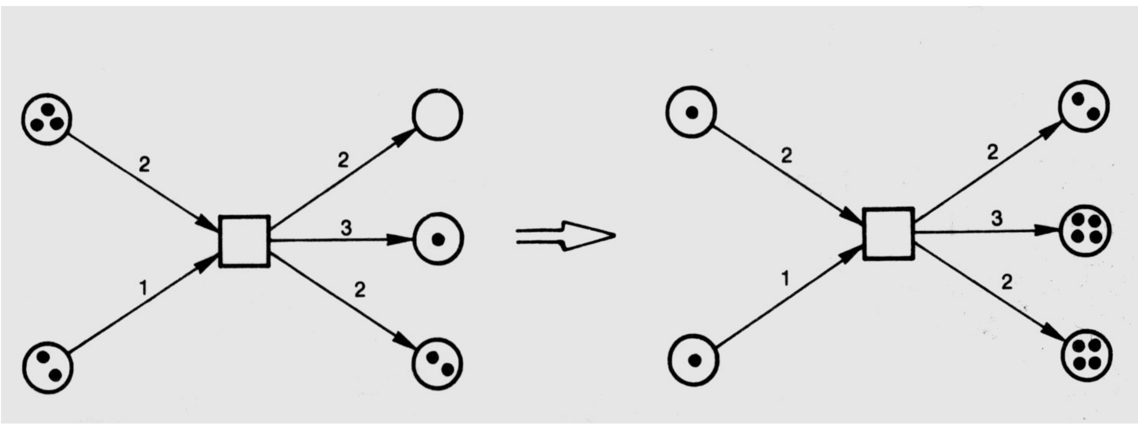
Schalten von Transitionen:

– Das Schalten einer Transition *t* bewirkt einen Markenfluss entsprechend den Kantengewichten der eingehenden und ausgehenden Kanten von *t*

$$\forall\, p \in P : \mathrm{M}'(p) = \begin{cases} \mathrm{M}(p) - \mathrm{W}(p, t) & \text{wenn } p \in \mathrm{In}(t) \wedge p \notin \mathrm{Out}(t) \\ \mathrm{M}(p) + \mathrm{W}(t, p) & \text{wenn } p \in \mathrm{Out}(t) \wedge p \notin \mathrm{In}(t) \\ \mathrm{M}(p) - \mathrm{W}(p, t) + \mathrm{W}(t, p) & \text{wenn } p \in \mathrm{In}(t) \wedge p \in \mathrm{Out}(t) \\ \mathrm{M}(p) & \text{sonst} \end{cases}$$

Petrinetze

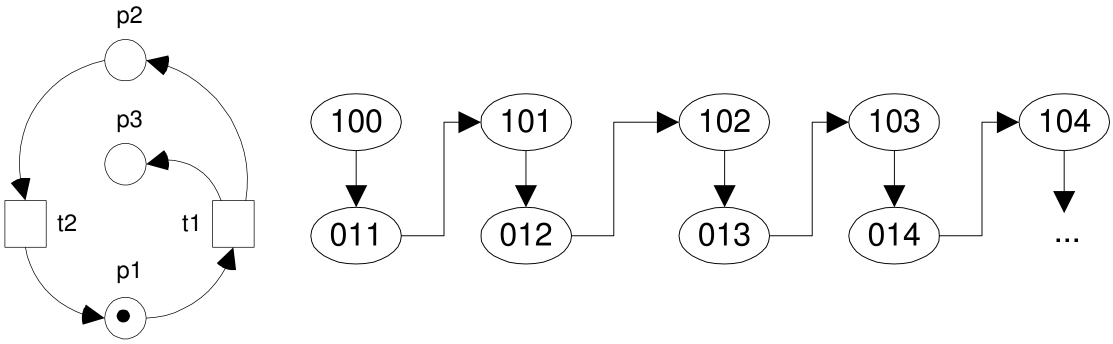
Erweiterte Schaltregel: Abbildung



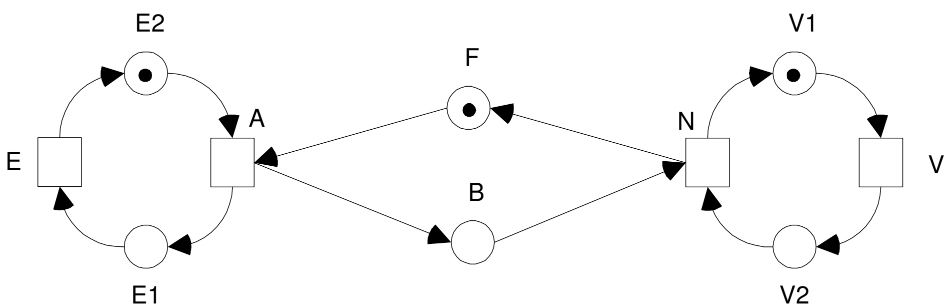
Erreichbarkeitsgraph und Erreichbarkeitsmenge

- Basis der Analyse von Petrinetzen ist der *Erreichbarkeitsgraph*
- Der *Erreichbarkeitsgraph* gibt ausgehend von einer Anfangsmarkierung M_0 die Folge der erreichbaren Markierungen an
- Dadurch kann bestimmt werden, welche prinzipiellen Markierungen das Petrinetz erreichen kann
- Die Menge der durch den Erreichbarkeitsgraph erzeugten Markierungen heißt die *Erreichbarkeitsmenge*

Beispiel: Petrinetz und sein Erreichbarkeitsgraph

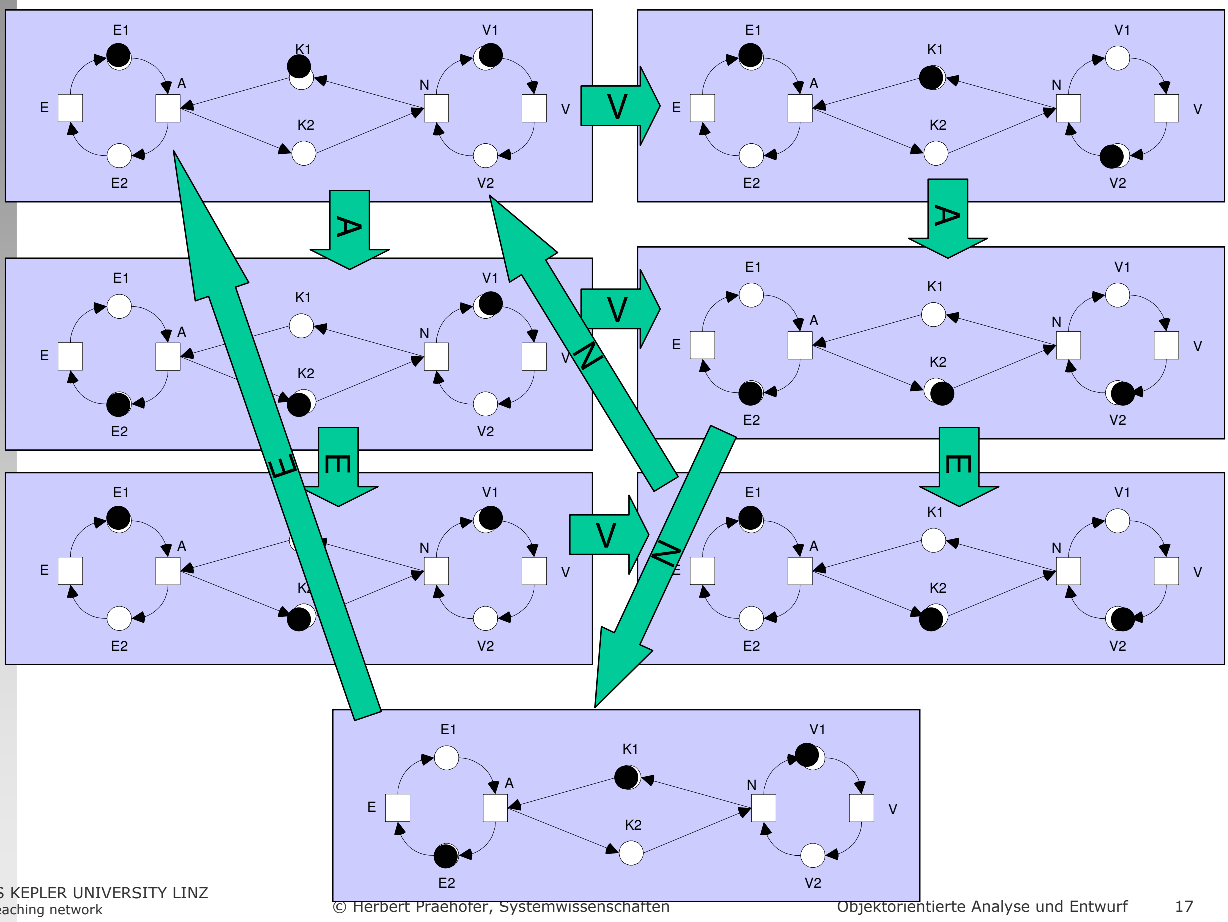


Erreichbarkeitsgraph



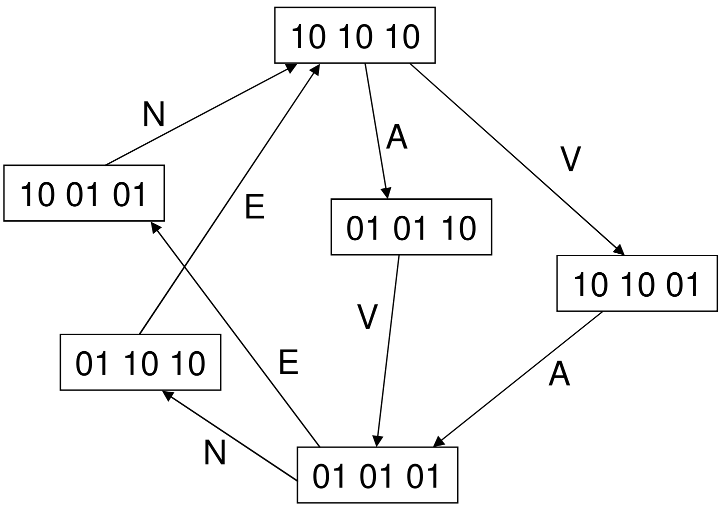
Petrinetze

Beispiel Erreichbarkeitsgraph



Petrinetze

Beispiel Erreichbarkeitsgraph (Fortsetzung)



Verklemmung, Lebendigkeit und Sicherheit

Der Erreichbarkeitsgraph erlaubt die Bestimmung wichtiger Eigenschaften von Petrinetzen:

- Unter einer *Verklemmung* eines Petrinetzes N verstehen wir eine Markierung V, bei der es keine Transition aus T gibt, die bei V schaltbar ist
- Ein Petrinetz N ist *lebendig*, wenn die Erreichbarkeitsmenge keine Markierung enthält, die eine Verklemmung ist.
- Ein Petrinetz heißt *sicher bezüglich einer vorgegebenen Markenanzahl B*, wenn die Erreichbarkeitsmenge keine Markierung enthält, bei der einem Platz mehr als B Marken zugewiesen sind.
- Ein Petrinetz wird *sicher* schlechthin bezeichnet, wenn es sicher bezüglich der Markenanzahl B=1 ist.

Typen von Petrinetzen

- Bedingungs/Ereignis - Netze
- Stellen/Transitionen - Netze
- Netze mit individuellen Marken
- Zeitbehaftete Netze
- Stochastische Netze

Petrinetze

Bedingungs/Ereignis-Netze

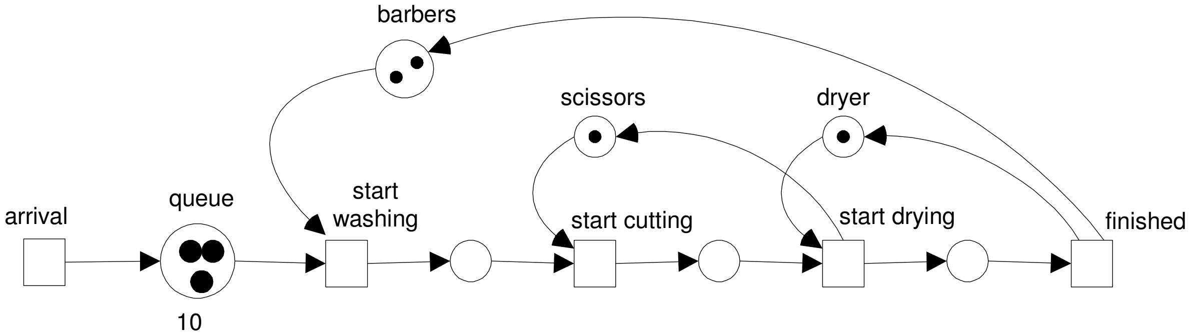
- Plätze modellieren boolesche Bedingungen
  - eine Marke auf einer Bedingung bedeutet, dass die Bedingung wahr ist
  - alle Plätze haben die Kapazität 1
- Transitionen modellieren Ereignisse

Petrinetze

Stellen/Transitionen - Netze

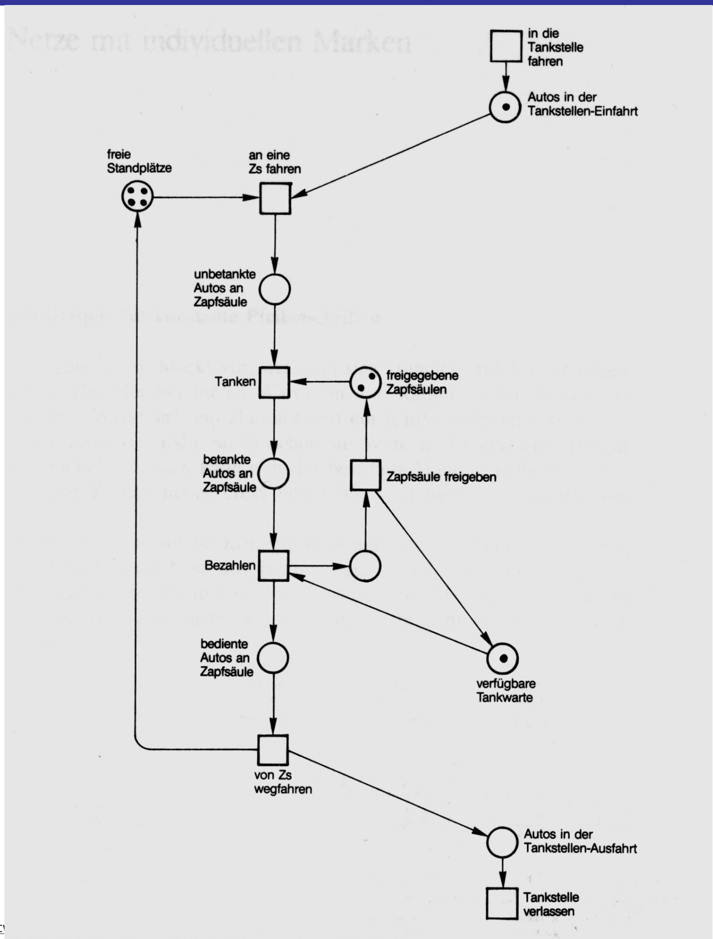
- Braucht man Mengen von Marken bei Plätzen und unterschiedliche Kantengewichte für den Markenfluss, werden die sogenannten Stellen/Transitionen - Netze verwendet
- Modellierungskonzept der Stellen/Transitionen - Netze entspricht im wesentlichen dem allgemeinen Konzept von Petrinetzen wie oben dargestellt.

Beispiel BarberShop :



Petrinetze

Stellen/Transitionen - Netze: Beispiel Tankstelle



Petrinetze

Netze mit individuellen Marken (Coloured Petri Nets)

- Wird die Anonymität der Marken aufgegeben, sondern arbeitet man mit unterschiedlichen Typen und individuellen Objekten, so kommt man zum mächtigen Modellierungskonzept der

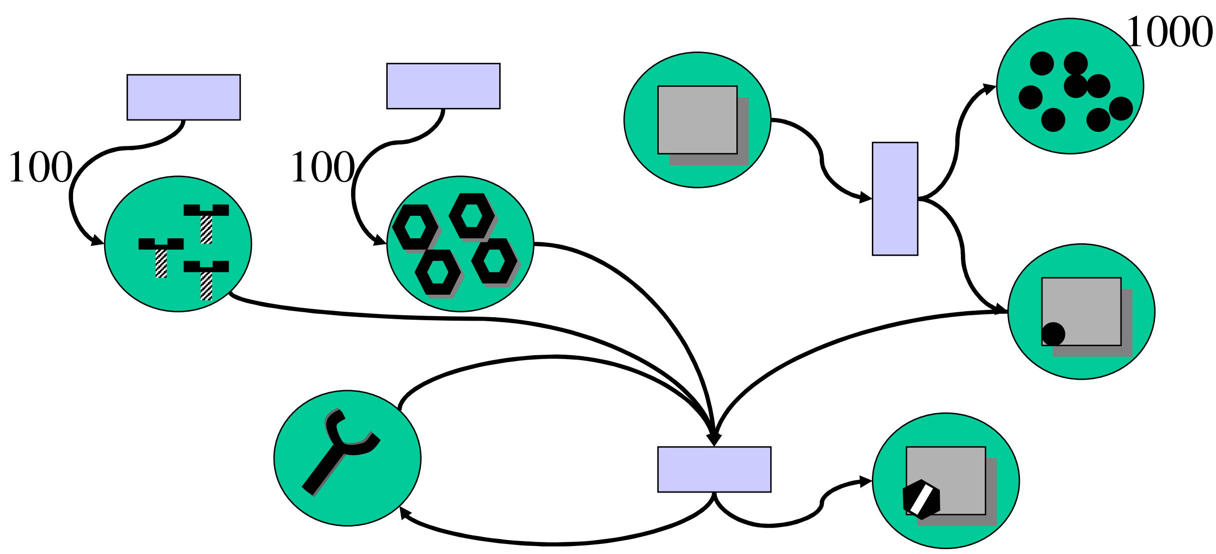
  Netze mit individuellen Marken

  oder auch

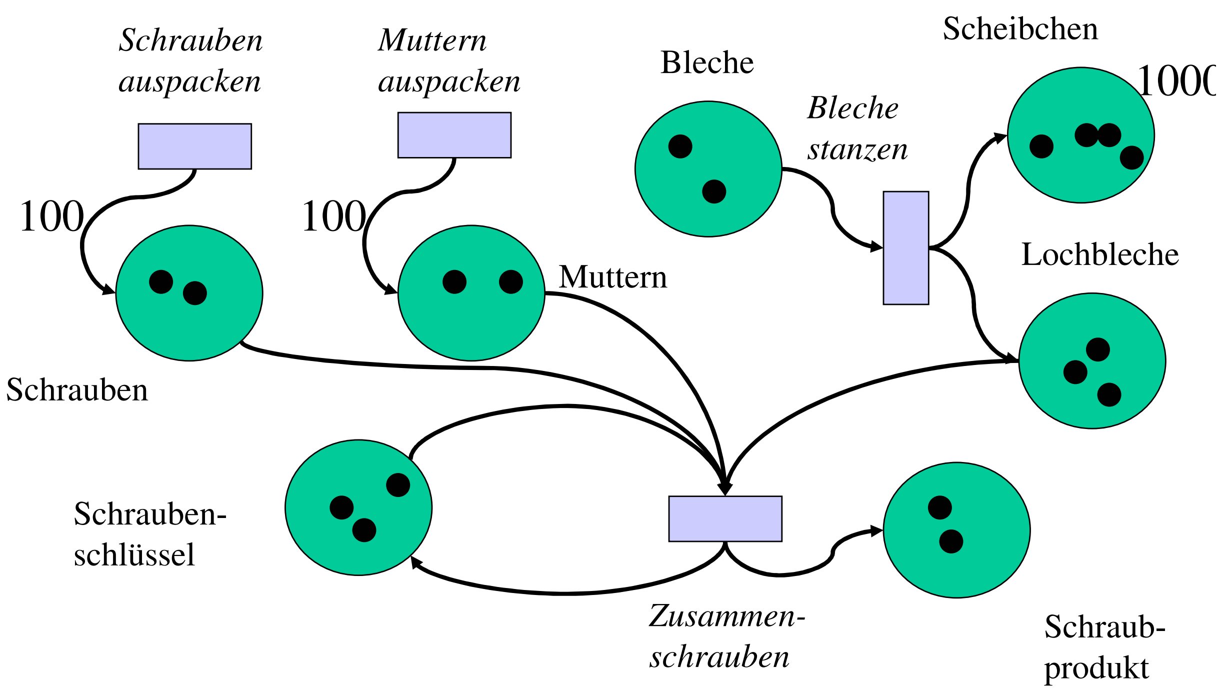
  Coloured Petri Nets

- Diese sind dann mit einem allgemeinen Programmierkonzept erweitert, mit welchem man den Fluss der Objekte von Platz zu Platz durch die Transitionen programmieren kann.

Beispielmodell: Netz mit individuellen Marken



Beispielmodell: Stellen/Transitionen - Netz



Zeitbehaftete Netze

Petrinetze

- Eine weiteres mächtiges Modellierungskonzept ergibt sich aus den Petrinetzen, wenn man eine reelle (Simulations-)zeit verwendet:
  - Schalten der Transitionen dauert Zeit (Zeitverzögerung)
  - Bei Fluss von Marken (Objekten) werden diese zeitverzögert bei den Ausgangsplätzen der Transitionen verfügbar sein
- Zeitbehaftete Petrinetze sind als Modellierungskonzept für die diskrete ereignisorientierte Simulation gut einsetzbar

Anmerkung: Alternativ kann auch für die Plätze eine Zeitverzögerung angegeben werden. Hier wird diese üblicherweise als Mindestverweildauer interpretiert.

Netz mit Zeitbedingungen

Petrinetze

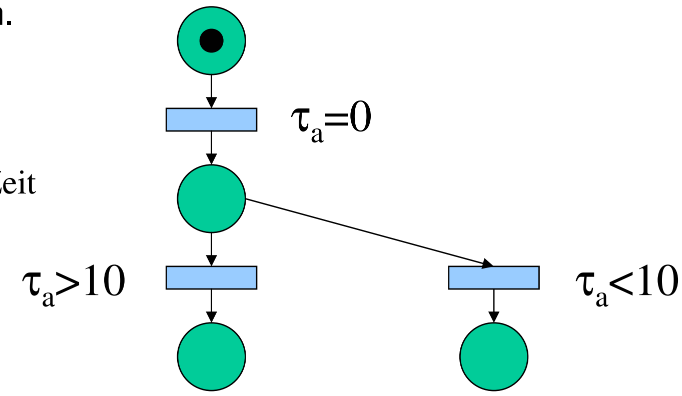
- Z.B. Netze mit Zeitbegriffen (für die Simulation besonders interessant)
- Zeit wird zugeordnet:
  - Stellen oder Transitionen
  - Stellen und Transitionen
- Zeitbedingungen werden formuliert:
  - Frühester Zeitpunkt
  - Mindestdauer
  - Spätester Zeitpunkt,
  - Höchstdauer
  - Exakter Zeitpunkt
  - Exakte Dauer etc.

Petrinetze

Netze mit Zeitbegriffen

- Zeiträume in Stellen werden als Mindestverweildauer interpretiert
- Zeiträume in Transitionen als Schaltdauer
- Erreichbarkeitsanalyse komplex
- Berechnung von Mindest- und Höchstzeiten
- Angabe deterministische oder auch Wahrscheinlichkeitsaussagen
- Zeitpunkte und Zeitintervalle in Netzen können auch mit Zufalls-Verteilungsfunktionen versehen werden (stochastische Netze) – inkl. statistischer Analysen.

τ_a die seit a verstrichene Zeit



Petrinetze

Stochastische Petrinetze

- Stochastische Petrinetze (SPN) gehen aus den Standard-Petri-netzen hervor, wobei jeder Transition eine exponentiell verteilte Schaltrate zugewiesen wird.
- Ein stochastisches Petrinetz ist ein Petrinetz

SPN = (S, T, Pre, Post, M_0, R)

mit S, T, Pre, Post und M_0 wie bereits eingeführt und $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.

- R ist die Menge der Schaltraten, wobei r_i den Mittelwert der zur Transition t_i gehörenden, exponentiell verteilten Schaltrate darstellt.

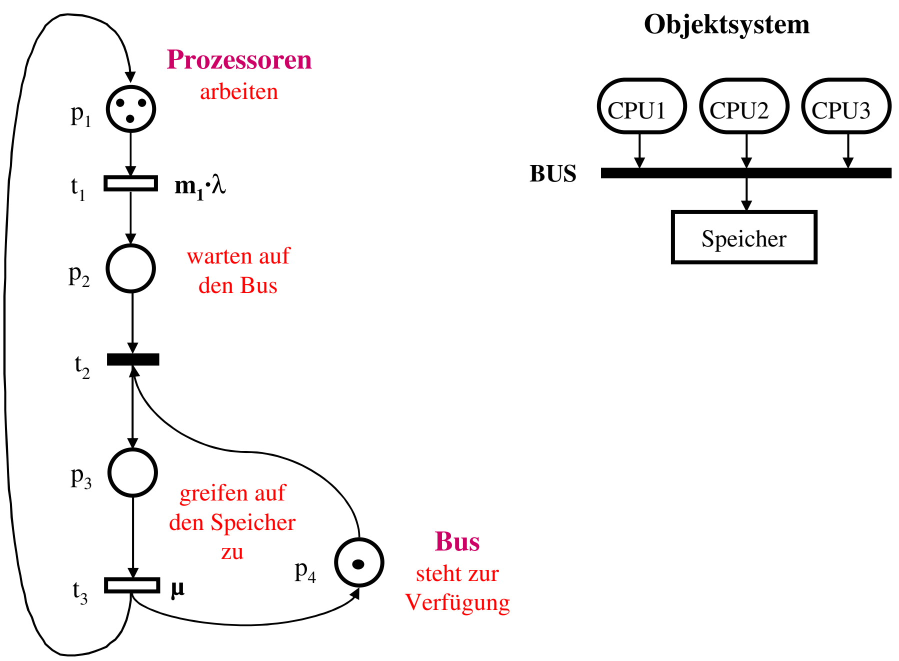
Petrinetze

Stochastische Petrinetze

- Für die analytische Modellierung ist die Exponentialverteilung die wichtigste und auch die am leichtesten handhabbare Verteilung, da sie als einzige kontinuierliche Verteilung die Markov-Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit (memoryless property) besitzt. (entsprechend lassen sich viele Kennwerte wie bei der Warteschlangentheorie berechnen).

Petrinetze

Beispiel



Petrinetze

Beispiel Fortsetzung

- Gegenstand der Modellierung in diesem Beispiel ist der Zugriff dreier Prozessoren auf einen gemeinsamen, globalen Speicherbereich über einen gemeinsamen Bus.
- Die drei Marken in p_1 repräsentieren die in ihrem lokalen Speicherbereich arbeitenden Prozessoren.
- Nach einer zufälligen, exponentiell verteilten Zeit mit Mittelwert $1/(m_1{*}\lambda)$ schaltet die Transition t_1 (markierungsabhängige Schaltrate) und eine Marke aus p_1 befindet sich nun in p_2 (einer der Prozessoren ist im Begriff auf den gemeinsamen Speicherbereich zuzugreifen).

Petrinetze

Beispiel Fortsetzung

- An Transition t_2 wird geprüft, ob der gemeinsame Bus (reprä-sentiert durch eine Marke in p_4) zur Verfügung steht.
- Ist das der Fall, schaltet t_2 und die Marken aus p_2 und p_4 verschwinden, während eine neue Marke in Platz p_3 hinzugefügt wird.
- Nach einer zufälligen, exponentiell verteilten Zeit mit Mittelwert $1/\mu$ (Modellierung der Speicherzugriffsdauer) schaltet die Transition t_3 und die Marke aus p_3 verschwindet, während in p_1 und p_4 jeweils eine neue Marke hinzugefügt wird (Ende des Speicherzugriffs und Busfreigabe).

Petrinetze als Modellierungswerkzeug für diskrete Simulationsmodelle

Petrinetze

- Zeitbehaftete Petrinetze mit individuellen Marken eignen sich gut als allgemeines Modellierungskonzept in der diskreten ereignisorientierten Simulation
  - nebenläufige Prozesse
  - Synchronisations- und Aktivierungsbedingungen
  - Zeitverzögerung
  - Workflowmodellierung
- Unterschiedliche diskrete Simulationssysteme basieren auf Petrinetze; sie vereinen
  - Petrinetzdarstellung
  - Programmiersprache
  - diskrete Simulationskonzepte
- Modellierung
  - Ressourcenpools, Bedingungen, Speicher, Warteschlangen, etc. durch Plätze
  - Entitäten, Transaktionen, Ressourcen, boolesche Werte durch Marken(-objekte)
  - Aktivitäten durch Transitionen mit Zeitverzögerung

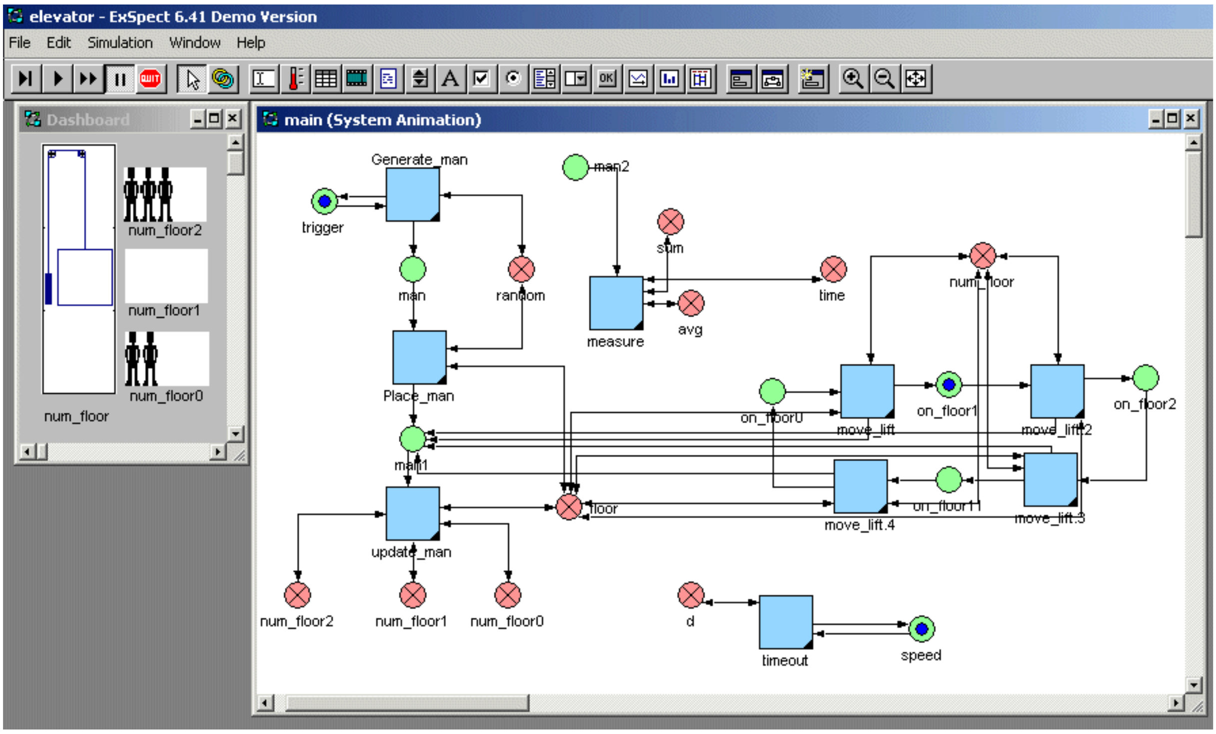
Simulationssystem *ExSpect*

Petrinetze

- Zeitbehaftete Petrinetze mit individuellen Marken
- Funktionale Programmiersprache
  - Mengenoperationen
  - Anweisungen für den Markenfluss
  - Zeitverzögerung des Markenflusses
- Simulationssystem
  - Simulation
  - Animation
  - statistische Auswertung

Petrinetze

Simulationssystem *ExSpect: ScreenShot*



Petrinetze

Zusammenfassung

- Petrinetze sind gerichtete, bipartite Graphen mit Anfangsmarkierung, Kantengewichtung, Kapazität der Stellen
- Entsprechend der Struktur werden unterschieden: Zustandsmaschinen, Synchronisationsnetze, FreeChoiceNetze, etc.
- Eigenschaften wie Sicherheit und Lebendigkeit können bei den einfachen Petrinetzen durch die Analyse des Erreichbarkeitsgraphen gelöst werden.
- Es existieren unterschiedliche Erweiterungen der Petrinetze, z.B. Petrinetze mit individuellen Marken, Nicht-Standard Netze, z.B. Petrinetze mit Verbotskanten und
- Petrinetze mit Zeitbegriffen (Verzögerungen)
  - deterministisch
  - zufallsverteilt -> stochastische Petrinetze können analytisch (Exponentialverteilung) oder simulativ ausgewertet werden (vgl. Warteschlangentheorie)